УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ

Є.А. Олійник

ДВНЗ «Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника», факультет математики та інформатики Україна, м.Івано-Франківськ, вул.Шевченка, 57
oliynyk-eva@rambler.ru

Динамічні моделі біології та медицини часто повинні враховувати залежність майбутнього розвитку процесу не тільки від теперішнього стану, але й від передісторії розвитку процесу . Математичним описом таких моделей зазвичай слугують диференціальні рівняння із загаюванням (інша назва – рівняння з післядією), які є узагальненням звичайних диференціальних рівнянь.

Систему диференціальних рівнянь із загаюванням у загальному випадку можна записати у вигляді

$$\dot{x} = f\left(t, x(t)\right), \tag{1}$$

де t – незалежна скалярна змінна, $x(t)$ – шукана векторна функція, x – фазовий вектор.

Введення загаювання в диференціальні рівняння, що описують певний біологічний процес, є відомим математичним прийомом. У багатьох задачах загаювання має конкретний сенс. Наприклад, в задачах про популяції, що умовно класифікуються як «хижак» і «жертва», такий прийом дозволяє враховувати вік частини популяції або інші характеристики їх розвитку, народжуваності чи вимирання [1].

У багатьох моделях загаювання вводиться як характеристика маловивчених процесів, яка на певному етапі побудови моделі в неї не включаються. Це може бути, наприклад, час транспорту молекул від місця їх синтезу до місця включення в систему реакцій; час формування клітин певного типу, що беруть участь в імунній реакції; тривалість реакції частини популяції на обмежуючі чинники навколишнього середовища тощо.

Якщо допустити, що швидкість зростання чисельності популяції залежить від чисельності попереднього покоління, то одержуємо таку задачу для оцінки чисельності популяції:

$$\dot{x} = \left(a - x(t - t_0)\right)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

Математичною моделлю епідемії інфекційної хвороби, яка дозволяє оцінити динаміку зміни кількості здорового та інфікованого населення, а також населення, що має імунітет до певної інфекції, є система звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t-\tau_2), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_2(t-\tau_2). \end{cases} \tag{3}$$

де x_1 – кількість здорового населення; x_2 – кількість інфікованого населення; x_3 – кількість населення, яке має імунітет до конкретного типу інфекції; τ_1 – час інкубаційного періоду хвороби; τ_2 – час, протягом якого набутий організмом імунітет до хвороби втрачається.

Система (3) не враховує смертності внаслідок епідемії. Якщо ввести змінну x_4, яка відповідатиме за кількість населення, що померло через хвороби, то систему (3) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t-\tau_2), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t-\tau_1) + x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_2(t-\tau_2), \\ \dot{x}_4(t) = kx_2(t), \end{cases} \tag{4}$$

де k – коефіцієнт смертності внаслідок інфекції.

Для систем (3) та (4) необхідно поставити початкові умови, наприклад:

$$x_1(0) = N_0, \quad x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0. \tag{5}$$

Задачі (3), (5) та (4), (5) є задачами Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням. Для знаходження їхніх розв’язків, як правило, застосовують числові методи [3].

Нами розроблено різні варіанти вказаних моделей, розглянуто аналітичні й числові методи їх реалізації, проведено порівняльний аналіз методів за критерієм точності та вибрано в якості оптимального метод Рунге – Кутта четвертого порядку. Створено програмний комплекс для реалізації вказаних моделей мовою C++, проведено широкий спектр тестових розрахунків, які засвідчили добре узгодження результатів із результатами розрахунків інших авторів.

Одним з найважливіших напрямів подальших досліджень є побудова складніших моделей епідеміологічних ситуацій та підбір емпіричних коефіцієнтів на основі даних про епідемії в різних країнах світу.

Література

1 Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976.

2 Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М., 1990.

3 Bocharov G. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations. –J. Comput. Appl. Math. – 2000. – Vol. 125.

4 Brauer F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. – New York, 2012.