КВАЗІСТАТИКА КАПІЛЯРНИХ ПОВЕРХОНЬ ТИПУ ЛЕЖАЧА КРАПЛЯ (SESSILE DROP)

Малько О. Г., Малько А. О.

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

mmi@nung.edu.ua

Фізично капілярні поверхні (меніски) типу "sessile drop" становлять собою краплю рідини утворену на горизонтальній поверхні, або на торці капіляра направленого вертикально вгору. Таку ж поверхню утворює газовий пухирець у рідині при тих же умовах формування, тільки у напрямку вертикально вниз.

Вперше математичне моделювання поверхонь типу "sessile drop" здійснили у кінці 19-го сторіччя Башфорт і Адамс, шляхом чисельного інтегрування рівняння капілярності Юнга-Лапласа у диференціальній формі [1]. Отримані результати у вигляді відомих таблиць Башфорта і Адамса [2] широко використовувались при визначення фізико-хімічних властивостей поверхонь розділу фаз [3], а чисельний метод, під однойменною назвою, став класичним.

У даній роботі розглядаються меніски, що утворюються на торці ножового капіляра. Їх форма визначається: поверхневим натягом рідини - σ; різницею густин контактуючих фаз - $\Delta\rho$; прискоренням вільного падіння - g; радіусом торця капіляра - r. Для узагальнення результатів дослідження в процесі математичного моделювання шуканих параметрів меніска доцільно їх подати у вигляді безрозмірній формі, шляхом приведення до капілярної сталої у безрозмірній формі [4]:

$$a_r^2 = \frac{\sigma}{\Delta\rho g r^2}. \tag{1}$$

Процес росту меніска на торці вертикально зануреного у рідину ножового капіляра можна представити послідовністю капілярних поверхонь (рис 1), що описуються рівнянням капілярності Юнга-Лапласа, яке представлено такою системою диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dL_a} = K_a - \frac{\sin\varphi}{x_a} + z_a, \quad \frac{dx_a}{dL_a} = \cos\varphi, \quad \frac{dz_a}{dL_a} = \sin\varphi, \\ \frac{dV_a}{dL_a} = \pi x_a^2 \sin\varphi, \quad \frac{dS_a}{dL_a} = 2\pi x_a, \end{cases} \tag{2}$$

де φ – кут між нормаллю до капілярної поверхні і віссю симетрії, L_a – довжина дуги осьового перерізу, K_a – Гаусова кривизна в омбілічній точці, x_a — горизонтальна координата, z_a – вертикальна координата, S_a– площа поверхні меніска, V_a – об'єм меніска. Початкові умови в омбілічній точці ($L_a = 0$) наступні:

$$\varphi = 0, \ x_a = 0, \ z_a = 0, \ S_a = 0, \ V_a = 0, \ \lim_{L_a \to 0} \frac{d\varphi}{dL_a} = \frac{K_a}{2}. \tag{3}$$

Для опису процесу зростання меніска у якості незалежної змінної було взято його характеристики, що монотонно змінюються із зростанням об'єму меніска і можуть приймати наперед задані дискретні значення. У якості таких характеристик доцільно взяти об'єм меніска V_a або кут φ між нормаллю до капілярної поверхні і віссю симетрії.

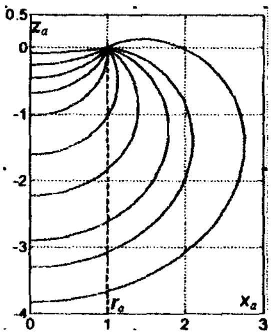


Рис. 1: Послідовність капілярних поверхонь для $a_r^2 = 1$

Для визначення особливостей зміни характеристик меніска при його переході через екстремальні стани також визначався безрозмірний тиск у меніску:

$$P_a = \frac{P}{\Delta\rho g a} = Ka + z/a = K_a + z_a, \qquad (4)$$

де P — розмірний тиск у меніску.

Чисельне інтегрування здійснювалося методом Рунге-Кута 4-го порядку з корекцією похибки на кроці, що дало можливість досягти похибки порядку h^5. Пошук екстремуму $P_{\max_a}$ здійснювався шляхом послідовного звуження інтервалів методом золотого перерізу.

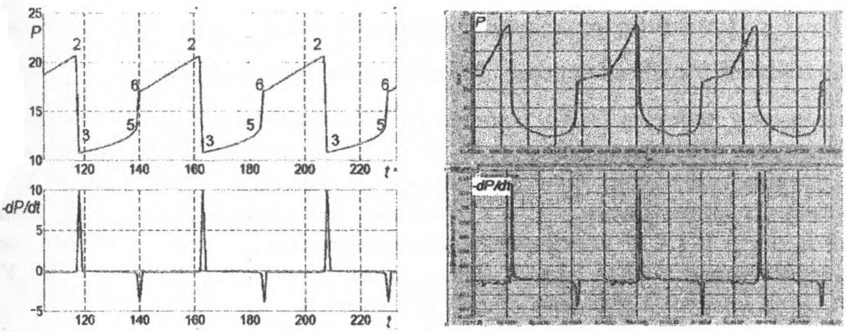
Для випадку моделювання квазістатики меніска газового пухирця після проходження $P_{\max_a}$ відбувається стрибкоподібне зростання його об'єму, а при оберненому процесі стрибкоподібне зхлопування. В результаті виникає явище гістерезису [1].

Для імітації процесу пульсації меніска з розгорткою у часі (швидкість подачі об'єму ΔV стала) шляхом сплайн апроксимації з урахуванням гістерезису було здійснено приведення всіх характеристик меніска до рівномірної дискретизації по ΔV. Імітація часової залежності тиску і першої похідної тиску (з оберненим знаком) у пульсівному меніску наведені на рис.7, а. В даному випадку режим пульсації визначається реверсом подачі повітря в моменти стрибкоподібної зміни тиску у меніску. Результати фізичної реалізації описаного режиму пульсації тиску у бульбашці та його похідної наведені на рис.7, б. Очевидна якісна подібність часових характеристик.

Прикладним аспектом моделювання є теоретичне обґрунтування методу пульсівного меніска для визначення динаміки поверхневого натягу рідин.

Література

[1] Малько А. О. Математичне моделювання процесу зміни об'єму газової бульбашки при фіксованій кількості газової фази / А.О. Малько // Вісник Кременчуцького Національного Університету імені Михайла Остроградського. – 2011. – №5. – С. 44-46



(a) (b)

Рис. 2: Часові характеристики пульсації меніска

[2] Bashforth F., Adams J.J, An Attempt to Test the Theories of Capillary Action / F Bashforth., J.J Adams //,- Cambridge University Press.,1883,p.59 - 80.

[3] Кисиль И. С. О точности измерения поверхностного натяжения по методу максимального давленияв газовом пузырьке / И. С. Кисиль, О. Г. Малько, М. М. Дранчук// :ЖФХ, т.55, вып. metricconverterProductID2, М2, М., Наука, 1981, С. 318-326.

[4] Малько О. Г. Термодинамічні основи контролю концентрації мікровключень по зміні міжфазних характеристик /Малько О. Г. // Методи та прилади контролю якості. – № 4, 1999. – С. 100 –106.

МУЛЬТИЛІПШИЦЕВІ p-СУМОВАНІ ФУНКЦІЇ

Марцінків Марія

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

mariadubey@gmail.com

Нехай X — непорожній метричний простір, зафіксуємо у ньому деяку точку θ_x. Такий метричний простір називається *простором з відміченою точкою*. Відображення f між метричними просторами X та Y називається *ліпшицевим*, якщо існує стала L_f така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant L_f \rho_X(x_1, x_2)$, де найменша з можливих сталих L_f називається сталою Ліпшиця. Загальна теорія ліпшицевих відображень викладена у монографіях Н. Вівера [5], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [1]. У роботі В. Пестова [4] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_x існує єдиний (з точністю до ізометричного ізоморфізму) банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x) \in \mathrm{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного оператора $\widetilde{f}(x) : B(X) \to E$ для довільного нормованого простору E, причому